

## Solucions

---

### Problemes proposats a SCM/Notícies 12

**B42.** (Proposat per Anton Montes, UPC.) Si  $G$  un grup i  $H$  un subgrup de  $G$ . Sigui  $x \in G$ .

a) Demostreu que

$$(\forall x, xHx^{-1} \subset H) \Rightarrow (\forall x, xHx^{-1} = H).$$

b) Demostreu que per tot grup finit, si  $x$  és un element particular de  $G$ , es té la proposició següent (que anomenarem  $p$ ):

$$xHx^{-1} \subset H \Rightarrow xHx^{-1} = H.$$

c) En el cas general que el grup  $G$  sigui d'ordre infinit, hi ha tres possibilitats per a la proposició  $p$  anterior:

- La proposició  $p$  és certa per a tot grup  $G$ .
- La proposició  $p$  no és certa.
- La proposició  $p$  no es pot decidir.

Quina possibilitat és la correcta?

**Solució:** (Solució de Rafael Farré (UPC)).

a) De

$$(\forall x, xHx^{-1} \subset H)$$

es dedueix

$$(\forall x, x^{-1}Hx \subset H).$$

Ara, multiplicant la segona per  $x$  a l'esquerra i per  $x^{-1}$  a la dreta, resulta

$$(\forall x, H \subset xHx^{-1}).$$

b) Si  $H$  és finit, cada element té ordre finit. Si  $m$  l'ordre de  $x$ . Llavors  $x^{m-1} = x^{-1}$ . Per altra banda, de  $xHx^{-1} \subset H$  es dedueix que  $\forall j \geq 0, x^j H x^{-j} \subset H$ . Tenint en compte que  $x^{-1} = x^{m-1}$ , resulta que  $x^{-1} H x \subset H$ . Ara, de les dues inclusions, resulta com en l'apartat anterior  $xHx^{-1} = H$ .

c) La resposta, en el cas d'un grup infinit general és falsa. Heus aquí un contraexemple: Sigui  $G$  el grup lliure de dos generadors  $(x, y)$  i  $H$  el subgrup format pels elements següents:

$$H = \{x^{n_1} y^{m_1} x^{n_2} y^{m_2} \dots y^{m_k} x^{n_{k+1}}, \\ n_1 \geq 0, n_{k+1} \leq 0, \sum_j n_j = 0\}.$$

òbviamment  $H$  és un subgrup de  $G$  ja que el producte de dos elements de  $H$  pertany a  $H$ , i també si  $h \in H$ , l'invers  $h^{-1} \in H$ . És clar que  $xHx^{-1} \subset H$ , en canvi  $H \not\subset xHx^{-1}$  ja que  $y^m \in H$  però  $y^m \notin xHx^{-1}$ . Per tant tenim un exemple de grup, subgrup i element tals que la inclusió és estricta i no hi ha igualtat entre  $xHx^{-1}$  i  $H$ . De fet, tenim una cadena infinita d'inclusions estrictes:

$$\dots \subset x^m H x^{-m} \subset \dots \subset xHx^{-1} \subset H \subset \\ x^{-1} H x \subset \dots \subset x^{-k} H x^k \subset \dots$$

Pelegrí Viader  
UPF

## Tesis

---

El Notícies ens agradaria publicar la foto dels nous doctors. Alguns doctorands no s'acaben d'animar. Demanem, doncs, als directors de tesi que animeu els vostres doctorands a col·laborar amb nosaltres. Gràcies.

- XAVIER BARDINA SIMORRA va llegir la seva tesi, dirigida per Maria Jolis Giménez, titulada *Convergència en llei cap a funcionals del procés de Wiener i una extensió de la fórmula d'Itô*, el dia 31 de març de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Aquesta memòria consta de dues parts ben diferenciades: el primer capítol, on es demostra una extensió de la fórmula d'Itô, i la resta de la memòria, on s'estudien diferents problemes de convergència feble.

En la primera part es demostra una extensió de la fórmula d'Itô per  $F(X_t, t)$ , on  $F(x, t)$  és una funció absolutament contínua en  $x$ , amb derivada localment de quadrat integrable que satisfà una condició feble de continuïtat en  $t$ , i  $X$  és una difusió unidimensional tal que la llei de  $X_t$  té una funció de densitat que satisfà certes condicions d'integrabilitat.

Seguint les idees d'un treball de Föllmer, Protter i Shiriyayev, on es prova una extensió anàloga pel cas en què  $X$  és un moviment brownià, la prova es basa en l'existència d'una integral *backward* de  $F'(X, \cdot)$  respecte  $X$ .

Finalment es demostra, usant tècniques del càlcul de Malliavin, que, sota certes condicions de regularitat dels coeficients, l'extensió de la fórmula d'Itô es pot aplicar a les difusions for-

tament el·líptiques i a les el·líptiques.

En el segon capítol es construeixen uns processos, a partir d'un procés de Poisson al pla, que convergeixen en llei cap a un drap brownià. Aquest resultat està inspirat en un resultat similar, per al cas uniparamètric, de Stroock.

El mètode de demostració de la convergència en llei que s'ha utilitzat és l'habitual: es prova que la família de lleis és ajustada, i que la llei de tots els possibles límits febles és la llei límit que es vol determinar.

Aquest mateix mètode de demostració és utilitzat en el tercer capítol per a provar la convergència en llei d'uns processos construïts a partir d'un únic procés de Poisson uniparamètric cap a un moviment brownià complex. Aquest resultat és una generalització del resultat de Stroock que hem mencionat abans.

Finalment, en el quart capítol d'aquesta memòria s'estudia la convergència en llei cap a integrals múltiples de Stratonovich.

- JORDI LÓPEZ ABAD va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Bagaria Pigrau, titulada *Aplicaciones de la teoria de conjuntos al análisis*, el dia 5 de maig de 2000. La tesi correspon al Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona.

Sigui  $\mathcal{X}$  un espai de Banach de dimensió infinita, i sigui  $B(\mathcal{X})$  el conjunt de totes les bases de blocs normalitzades de  $\mathcal{X}$ . Llavors  $B(\mathcal{X})$ , amb la seva topologia natural, és un espai polonès. Així, com passa en el cas clàssic amb  $[\mathbb{N}]^\omega$ , ens podem preguntar si un subconjunt  $\sigma$  de  $B(\mathcal{X})$  és Ramsey, i.e., si podem trobar una base de blocs  $Y$  de  $\mathcal{X}$  tal que o bé cap de les seves successions de blocs són a  $\sigma$ , o totes elles ho són. Mentre que la propietat de Ramsey a  $[\mathbb{N}]^\omega$  és simètrica, la propietat de ser feblement-Ramsey no ho és. Diem que un subconjunt  $\sigma$  de successions de blocs és *gran* si tota successió de blocs té una subsuccessió a  $\sigma$ . Donada una successió de blocs  $X$ , considerem un joc amb dos jugadors  $I$  i  $II$ : ambdós juguen vectors blocs de  $X$ ;  $II$  intentarà de produir una successió de blocs que és (llevat d'un error) a  $\sigma$ ; i  $I$  intentarà forçar que la successió triada per  $II$  no sigui a  $\sigma$ . Un subconjunt  $\sigma$  de successions de blocs és *feblement-*

*Ramsey*, si quan sigui que  $\sigma$  és gran, llavors  $\sigma$  és molt gran, és a dir, hi ha alguna successió de blocs  $X$  tal que el segon jugador  $II$  té una estratègia guanyadora per a tots els jocs jugats a  $X$ . Usant algunes idees de Gowers i les similituds amb altres resultats en teoria de conjunts combinatòria, provem que tot conjunt analític (en el sentit de Suslin) de successions de blocs és feblement-Ramsey. Una forma de l'axioma de Martin implica que totes les imatges de conjunts coanalítics són també feblement-Ramsey. Però es pot provar, usant l'axioma de Martin, que hi ha contraexemples naturals. Hi han dues generalitzacions més: qualsevol conjunt projectiu de successions de blocs en un model de Solovay obtingut al col·lapsar un cardinal de Mahlo és feblement-Ramsey i l'axioma de determinació per a subconjunts projectius de l'espai  $[\mathbb{N}^\omega]$  implica que qualsevol subconjunt projectiu de successions de blocs és feblement-Ramsey.

- ARNAU FOLCH DURAN va llegir la seva tesi, dirigida per Ramon Codina Rovira (UPC) i Joan Martí Molist (CSIC), titulada *A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers*, el dia 17 de maig de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.



La tesi presenta un algorisme per a la resolució de les equacions de Navier-Stokes amb acoblament mecànic en el context del mètode dels elements finits. La solució de la versió ALE de les equacions de Navier-Stokes es basa en un mètode de pas fraccionari combinat amb una tècnica de projecció del gradient de pressions que produeix l'efecte d'estabilització requerit per al camp de pressions en les versions implícites de l'algorisme. L'algorisme tracta simultàniament fluxos compressibles i incompressibles usant els mateixos espais d'interpolació per als camps de velocitat i pressió.

Els problemes d'interacció fluid-estructura es resolen mitjançant un procediment alternat en el qual les equacions del fluid i les de l'estructura s'integren alternativament en el temps. Es contempla també una estratègia de «remallat» amb una interpolació conservativa de variables nodals. Les aplicacions particulars es

centren bàsicament en la modelització de la dinàmica de buidat de càmeres magmàtiques. Es proposa un model físic per als tipus d'erupcions volcàniques més comuns. Les diferents simulacions de successos eruptius contemplen des d'erupcions desencadenades per saturació de volàtils fins a erupcions que formen calderes de col·lapse.

Per altra banda, es presenta també un procediment numèric per calcular deformacions viscoelàstiques del terreny en zones d'activitat volcànica. El procediment es basa en el principi de correspondència combinat amb el mètode de les sèries de Prony per obtenir transformades de Laplace inverses. Les aplicacions permeten acotar el domini d'aplicabilitat dels procediments analítics actuals i, simultàniament, permeten contemplar un espectre més ampli de possibilitats com, per exemple, fonts extenses, efectes topogràfics o anisotropies de l'escorça.

- JOSÉ LUÍS DÍAZ va llegir la seva tesi, dirigida per Juan José Egozcue Rubí, titulada *Characterization of polynomials by reflection coefficients*, el dia 8 de juny de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

El present treball tracta de les recurrències de Levinson i les seves conseqüències sobre polinomis. Temes relacionats han estat estudiats en diversos camps aplicats tals com procés del senyal i teoria del control, o des del punt de vista de la teoria analítica de polinomis. No obstant, hi ha una manca de completitud i molts resultats apareixen dispersos a la literatura.

La principal motivació va ser que les recurrències de Levinson per polinomis, la primera,

$$A_k(z) = zA_{k-1}(z) + \alpha_k A_{k-1}^*(z)$$

i l'última,

$$zA_{k-1}(z) = \frac{1}{1 - |\alpha_k|^2} [A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)]$$

semblen ser suficients per representar qualsevol polinomi mitjançant una successió de  $\alpha_k$ 's (coeficients de reflexió). No obstant, això no és possible i el problema és encara obert. El problema clau apareix en qualsevol moment, a la recursió cap enrere, un coeficient unitari de reflexió  $\alpha_k$  s'obté perquè la recursió aparentment s'atura. Els nostres objectius, orientats a atacar aquest problema, es poden resumir en tres punts específics:

1. Completar, si és possible, recurrències cap enrere quan un polinomi té un coeficient de reflexió unitari.
2. Classificar el conjunt de tots els polinomis en classes d'equivalència disjunctes relacionades al comportament de la recursió cap enrere associada.
3. Quan la recursió cap enrere no és possible, presentar un procediment de pertorbació per superar les dificultats en aquests casos singulars.

Els objectius (1) i (2) s'han aconseguit donant teoremes de caracterització i definint la classificació del conjunt de tots els polinomis.

La recursió cap enrere de Levinson no es pot realitzar quan el coeficient de reflexió és unitari. Es poden distingir dos casos: *a)* el polinomi és auto-inversiu i *b)* el polinomi no és auto-inversiu. En el cas *a)* existeixen infinites maneres d'obtenir un polinomi de grau inferior que generi l'anterior a base de continuar la recursió. Totes aquestes possibilitats han estat descrites. En el cas *b)* no existeix cap polinomi que generi, per recursió cap enrere, el polinomi original. Aquest estudi completa l'objectiu (1). Com a conseqüència d'aquesta anàlisi, s'obté una classificació de tots el polinomis objectiu (2).

Es demostra un teorema de densitat. Assegura que cada polinomi està tan a prop com vulguem (en el sentit  $L^2$ ) d'un que es pot obtenir per recursió cap enrere a partir d' $A_0(z) = 1$ . Així complim l'objectiu (3).

No obstant, s'han obtingut resultats addicionals nous sobre polinomis i la seva caracterit-

zació en els coeficients de reflexió així com en zeros i coeficients.

D'entre aquests, mereix especial menció una còpia de les fórmules de Cardan-Viète relacionant coeficients i coeficients de reflexió i una generalització de resultats clàssics com el teorema de Gauss-Lucas i el teorema de Cohn.

- MONICA BREITMAN va llegir la seva tesi, dirigida per Paz Morillo i Sergio Ruíz Moreno, titulada *Análisis, diseño e implementación de algoritmos para reconocimiento de espectros raman*, el dia 9 de juny de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Aquesta tesi es realitza amb dos objectius fonamentals. El primer és el disseny d'una base de dades d'espectres de materials pictòrics. El segon és la creació d'algorismes que permetin, a partir de mostres emmagatzemades a la base de dades, detectar components d'un espectre Raman donat. El primer pas és determinar quins són els paràmetres de l'espectre Raman que el caracteritzaran completament. La tècnica utilitzada per a l'obtenció dels espectres dels elements estàndards, és la radiació làser i la recollida de l'espectre de dispersió.

La bibliografia determina com a característica fonamental Raman per a la identificació d'elements aïllats el número d'ona, però quan es tracta de mescles són necessàries també les amplituds i el grossor de cada banda a meitat d'amplada. L'emmagatzament dels espectres es realitza a partir del disseny del programa «Editor de Pigmentos» (EDP), guardant les dades com vectors de tres components (freqüència, amplitud i grossor a meitat de cada banda), amb un número màxim de quinze bandes Raman per espectre. El programa permet realitzar cerques ràpides segons diferents característiques dels materials.

Per a la manipulació dels espectres s'ha realitzat un programa anomenat «Analizador de

Pigmentos» (ADP), que té la capacitat de llegir arxius amb la informació dels espectres i permet visualitzar-ne una gràfica. És el programa que permet extraure els tres paràmetres dels espectres. Treballant conjuntament amb els dos programes es poden identificar els espectres estàndards que componen una mescla. L'ADP conté uns filtres per a la supressió de soroll i realitza la identificació a través d'una cerca de coincidències entre les bandes de la mescla i les dels espectres emmagatzemats en l'EDP, indicant quins estàndards han coincidit, amb quantes bandes i un percentatge que dona una valoració de la identificació. Aquest programa també ens dona la llista de bandes Raman de cada espectre i permet amagatzemar la informació de forma directa en el EDP. S'ha introduït en el programa ADP la possibilitat de sumar espectres estàndards en diferents proporcions, amb la finalitat de comparar el resultat amb l'espectre d'una mostra física obtinguda en el laboratori. En l'última fase del treball s'ha realitzat un estudi de certs pigments d'acord amb el seu comportament en mescles. Es tracta d'un treball experimental que permetrà utilitzar tot el potencial dels programes.

- MONTSERRAT MAURESÓ SÁNCHEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Josep M. Brunat Blay, titulada *Dígrafs sobre grups abelians finits: anàlisi dels dígrafs endo-circulants*, el dia 16 de juny de 2000. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya. Ha rebut la menció de *Doctor Europeu*.

En aquest treball hem introduït la família dels dígrafs endocirculants, la qual inclou com a casos particulars els dígrafs de De Bruijn, els  $d$ -consecutius, els  $c$ -circulants i els dígrafs de Cayley sobre grups abelians finits, entre d'altres. Totes aquestes famílies han estat prou estudiades, especialment pel seu ús com a models de xarxes d'interconnexió.

L'objectiu ha estat esbrinar si certs resultats i tècniques, emprats en una o altra de les famílies esmentades, es poden generalitzar als dígrafs endocirculants i, per tant, extrapolar a les altres famílies. Això s'ha fet amb tres problemes clàssics molt vinculats a les aplicacions: la connexió, la simetria i l'hamiltonicitat.

Des del punt de vista de les aplicacions, el més freqüent és utilitzar dígrafs forts. En el segon capítol es caracteritzen els dígrafs endocirculants que són connexos i els que són fortament connexos. Al tercer capítol es mira d'esbrinar l'estructura dels components connexos d'un dígraf endocirculant, i fins a quin punt aquells conserven l'estructura d'endocirculant.

Respecte a la simetria, en primer lloc, s'han caracteritzat els dígrafs que són cicles generalit-

zats, fet que ha permès obtenir una condició suficient per tal que un dígraf endocirculant sigui de Cayley. La resta de resultats fan referència als endocirculants de grau 2. S'ha obtingut un criteri per decidir si, donats un dígraf de Cayley abelià i un dígraf endocirculant de grau 2, són o no isomorfs; s'han caracteritzat dígrafs endocirculants isomorfs a circulants, amb construcció explícita d'un isomorfisme; i, finalment, s'ha posat en el context dels endocirculants el resultat sobre l'equivalència —amb una única excepció— entre isomorfisme i Ádám isomorfisme per dígrafs de Cayley abelians de grau 2.

En el darrer capítol, es caracteritzen els dígrafs endocirculants que són línia, i es donen condicions senzilles per construir endocirculants que siguin línia i famílies de dígrafs línia iterats endocirculants. Respecte a la hamiltonicitat, la discussió mostra com tècniques emprades per estudiar-la en certes famílies concretes poden resultar útils per als endocirculants. Així, amb el maneig de la tècnica del dígraf línia, la tècnica general d'enllaçar cicles i la de l'*arc-forcing* subgrup, s'obtenen condicions suficients d'hamiltonicitat.

- DAVID ASPERÓ HERRANDO va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Bagaria, titulada *Bounded forcing Axioms and the Continuum*, el dia 6 de juliol de 2000. La tesi correspon al Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona.

Donada una classe  $\Gamma$  d'ordres parcials, l'*axioma de forcing* per a  $\Gamma$ ,  $FA(\Gamma)$ , és el següent enunciat:

Sigui  $\mathbb{P}$  un ordre parcial pertanyent a  $\Gamma$  i sigui  $\mathcal{A}$  un conjunt d'anticadenes maximals de  $\mathbb{P}$ ,  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_1$ . Aleshores hi ha un filtre  $G \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $G \cap A \neq \emptyset$  per a cada  $A \in \mathcal{A}$ .

L'*axioma afitat de forcing* per a  $\Gamma$ ,  $BFA(\Gamma)$ , és l'enunciat resultant d'afegir, en la definició d' $FA(\Gamma)$ , el requeriment addicional que  $|A| \leq \aleph_1$  per a tota  $A \in \mathcal{A}$ .

Joan Bagaria ha demostrat que els axiomes de *forcing* afitats es poden caracteritzar com a principis d'absolutesa genèrica. La formulació corresponent mostra que aquests axiomes són principis desitjables en el sentit que estableixen que  $H(\omega_2)$  és complet per a extensions de *forcing* en un cert sentit. Concretament, es té el següent:

Donada una classe  $\Gamma$  d'àlgebres de Boole completes,  $BFA(\Gamma)$  és equivalent a  $\Sigma_1(H(\omega_2))$ -absolutesa per a extensions de *forcing* amb or-

dres parcials pertanyents a  $\Gamma$ , això és, donats  $a \in H(\omega_2)$  i una  $\Sigma_1$ -fòrmula  $\varphi(x)$ , si hi ha algun  $\mathbb{P} \in \Gamma$  que força  $\varphi(\check{a})$ , aleshores  $H(\omega_2) \models \varphi(a)$ .

Els axiomes de *forcing* més forts amb què es treballa habitualment en teoria de conjunts, com ara el *Proper Forcing Axiom (PFA)*, impliquen que el continu té cardinal exactament  $\aleph_2$  ( $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ ). Una pregunta natural és, per tant, si hi ha un axioma afitat de *forcing* que decideix la cardinalitat del continu. Aquesta pregunta fou la motivació inicial de la meua tesi. Els resultats més destacables que he obtingut són els següents:

Provo que els axiomes afitats de *forcing* són consistents amb la negació de l'*Open Coloring Axiom* de Stevo Todorčević, un axioma sobre particions de parelles de reals que decideix moltes qüestions de topologia i que se segueix de *PFA*; concretament, els axiomes afitats de *forcing* són consistents amb l'existència d'un  $(\omega_2, \omega_2)$ -gap en  $\langle \omega^\omega, <^* \rangle$ .

Formulo una generalització natural dels axiomes afitats de *forcing* basada en la caracterització d'aquestes axiomes com a principis d'absolutesa genèrica i dono resultats d'equiconsistència d'aquests nous principis en termes d'una nova jerarquia natural de cardinals grans.

Estudio aquests cardinals en relació amb altres hipòtesis de cardinals grans considerades habitualment en teoria de conjunts.

Aillo una classe  $\Gamma$  d'ordres parcials tal que  $BFA(\Gamma)$  és un axioma afitat de *forcing* maxi-

mal, en el sentit que, per una banda,  $BFA(\Gamma)$  és consistent relativament a una certa hipòtesi de cardinals grans i, per altra banda,  $ZFC$  demostra que, si  $\mathbb{P}$  és un ordre parcial que no pertany a  $\Gamma$ ,  $BFA(\{\mathbb{P}\})$  és fals.

Provo que l'anomenat *Bounded Martin's Maximum*, que se segueix de l'axioma afitat de *forcing* maximal, implica, en presència de diverses hipòtesis addicionals d'existència o no existència de cardinals grans, que  $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ .

- YOUNES LAHLOU va llegir la seva tesi, dirigida per Carles M. Cuadras, titulada *Orthogonal expansions for a continuous random variable with statistical applications*, el dia 14 de juliol de 2000. La tesi correspon al Departament d'Estadística de la Universitat de Barcelona.

Les expansions de certes funcions relacionades amb una variables aleatòria  $X$ , com la funció de densitat, de distribució, els quantils, etc., són d'interès en estadística. Les expansions d' $X$  com una suma numerable de v.a. incorrelacionades és un tema escassament tractat, malgrat que hi ha precedents en anàlisi factorial, anàlisi de la variància i en tests de bondat d'ajust.

Sigui  $X$  una v.a. La memòria obté desenvolupaments del tipus  $X = \sum_{n \geq 1} b_n X_n$ , on  $\{X_n, n \geq 1\}$  és una successió de v.a. incorrelacionades. Podem interpretar les seves variàncies com una descomposició de la quantitat  $V = \frac{1}{2}E[|X - X'|]$ , on  $X$  i  $X'$  són iid.  $V$  és la variabilitat geomètrica de  $X$ , i és una mesura de dispersió respecte a la distància  $\delta(x, x') = \sqrt{|x - x'|}$ .

Si  $F$  és la funció de distribució d' $X$  amb distribució absolutament contínua, densitat  $f$  respecte a la mesura de Lebesgue, i suport  $[a, b]$ , considerem el nucli simètric

$$K(s, t) = \min\{F(s), F(t)\} - F(s)F(t), \\ s, t \in [a, b],$$

i el sistema ortonormal complet  $\{\psi_n(t), \lambda_n, n \geq 1\}$  de funcions pròpies i valors propis de  $K$ . Definim  $h_n(x) = \int_a^x \psi_n(t) dt$ . Aleshores provem que  $X_n = h_n(X)$ ,  $n \geq 1$ , és un sistema ortogonal respecte a la covariància, que donen lloc als desenvolupaments

$$X = x_0 + \sum_{n \geq 1} h_n(b)(X_n - h_n(x_0)), \\ X = x_0 + \sum_{n \geq 1} (X_n^2 - h_n(x_0)h_n(b)),$$

on  $a \leq x_0 < b$  i la convegència és en mitjana quadràtica. Les variables  $X_n$  són componen-

tes principals d'un procés de Bernoulli  $X_t, t \in [a, b]$  associat a  $X$ , que surten com una aplicació del desenvolupament de Karhunen-Loève d' $X_t$ . Una condició per a l'existència de les components és que la traça de  $K$  i la variabilitat geomètrica siguin finites. De fet, coincideixen:  $\text{tra}(K) = V$ . Es demostra que si  $\sigma^2 = \text{var}(X)$  és finita, també ho és la variabilitat geomètrica, que verifica  $V \leq \sigma/\sqrt{3}$ .

S'estudien detalladament els desenvolupaments ortogonals de les distribucions uniforme, exponencial, logística, Pareto i Laplace. La base trigonomètrica permet desenvolupar la variable uniforme, les funcions de Bessel permeten desenvolupar la variable exponencial, un cas particular de la Pareto i abordar la Laplace. Amb els polinomis de Legendre desenvolupem la variable logística. Per exemple, en el cas logístic, on  $F(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ , les components principals són  $X_n = P_n(2F(X) - 1)$ , essent  $P_n(x), n \geq 1$ , els polinomis de Legendre. El cas Pareto general requereix la funció cilíndrica  $C_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$ .

Un dels desenvolupaments de l'uniforme és formalment anàleg a l'expansió de l'estadístic  $W^2$  de Cramér-von Mises, utilitzat en bondat d'ajust. Per tant, es proposen aquestes expansions com a test gràfic per esbrinar si una mostra prové d'una certa distribució especificada, que concretament s'aplica a distingir entre les distribucions normal i logística, que són molt semblants. Finalment, a partir de les components principals, es proposa un criteri d'independència estocàstica i una generalització de la distribució de Farlie-Gumbel-Morgenstern.